Conglomerabilidad negativa

Enrique Miranda   Marco Zaffalon

mirandaenrique@uniovi.es   marco.zaffalon@idsia.ch

Universidad de Oviedo   IDSIA

UNIVERSIDAD OVIEDO

USI/SUPSI Istituto Dalle Molle di studi sull'intelligenza artificiale IDSIA

GEDM'2024, Oviedo

Resumen

- Savage introdujo el sure thing principle diciendo que si una acción A es deseable cuando en un momento futuro se observa el suceso E y también cuando se observa E^c, entonces debería ser deseable antes de realizar ninguna observación.
- Este axioma se puede generalizar a experimentos con una cantidad infinita de resultados, dando lugar a la condición de conglomerabilidad de Bruno de Finetti.
- En este trabajo estudiamos el fenómeno dual: si A no es deseable cuando se observa E ni cuando se observa E^c, ¿podemos rechazarla ya?
- Estudiamos qué ocurre tanto en el caso de información precisa como imprecisa.

IMAGINE

Modelos de probabilidades imprecisas

Cuando tenemos información imprecisa, las creencias/preferencias en un problema pueden modelizarse de muchas formas:

(i) Con una relación de orden *parcial* entre alternativas.

(ii) Especificando las transacciones bajo incertidumbre que estaríamos dispuestos a *aceptar*.

(iii) Con un conjunto de probabilidades compatibles con la información disponible.

(iv) Con unos operadores esperanza *inferior/superior*.

Existen transformaciones entre unos modelos y otros. En este trabajo el modelo básico es el de apuestas deseables.

Conjuntos de apuestas deseables

Dado un espacio $\mathcal{X}$, una apuesta es una función acotada $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Se considera deseable cuando su esperanza (inferior) es no negativa.

Según Williams, un conjunto de apuestas deseables $\mathcal{D}$ es coherente si:

- Incluye a las apuestas no negativas, y a ninguna apuesta negativa.
- Es invariante por cambios de escala.
- Es cerrado bajo sumas finitas.

A partir de un conjunto de apueestas deseables, se puede determinar la esperanza (=previsión) inferior de una apuesta f.

Previsiones inferiores coherentes

Un conjunto de apuestas deseables $\mathcal{D}$ induce una previsión inferior (condicionada):

$$\underline{P}(f) := \sup\{\mu : f - \mu \in \mathcal{D}\}$$

$$\underline{P}(f|B) := \sup\{\mu : B(f - \mu) \in \mathcal{D}\}$$

para toda apuesta f y todo $B \subseteq \Omega$.

La previsión inferior de f se puede interpretar como el máximo que estaríamos dispuestos a pagar a cambio de la ganancia que proporcione f.

Conglomerabilidad

Dada una partición $\mathcal{B}$ de Ω, decimos que un conjunto coherente de apuestas deseables $\mathcal{D}$ es $\mathcal{B}$-conglomerable si y sólo si

$$(\forall f \neq 0)(\forall B \in \mathcal{B})\ Bf \in \mathcal{D} \cup \{0\} \Rightarrow f \in \mathcal{D}.$$

Se han establecido conexiones con la previsión condicionada que induce:

Co1. $(\forall f \in \mathcal{L})\ \underline{P}(f|\mathcal{B}) \in \mathcal{D} \Rightarrow f \in \mathcal{D}$.

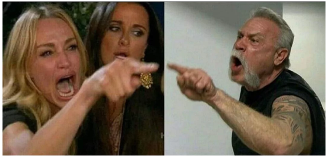
Co2. $\mathcal{D}$ is $\mathcal{B}$-conglomerable.

Co3. $\underline{P}(f - \underline{P}(f|\mathcal{B})) \geq 0$.

Co4. $\underline{P} \geq \underline{P}(\underline{P}(\cdot|\mathcal{B}))$.

$$\begin{tikzcd} \text{Co1} \arrow[d, Rightarrow] & \text{Co2} \arrow[d, Rightarrow] \\ \text{Co3} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{Co4} \end{tikzcd}$$

Conglomerabilidad, ¿sí o no?



- Bruno de Finetti rechazó la conglomerabilidad argumentando que las probabilidades finitamente aditivas no tienen por qué cumplirla. ✗
- Peter Walley en cambio consideró que era necesaria para actualizar las creencias de manera racional. ✓
- Miranda y Zaffalon justificaron la conglomerabilidad con argumentos de coherencia temporal. ✓
- Desde el punto de vista técnico introduce una serie de complicaciones con respecto a la coherencia de Williams. ✗

Conglomerabilidad negativa

Dada una partición $\mathcal{B}$ de Ω, decimos que un conjunto de apuestas deseables $\mathcal{D}$ satisface $\mathcal{B}$-conglomerabilidad negativa si y sólo si

$$(\forall f \in \mathcal{L})(\forall B \in \mathcal{B})\ Bf \notin \mathcal{D}\ \Rightarrow f \notin \mathcal{D}.$$

De manera dual al caso de la conglomerabilidad, dadas:

Co5. $(\forall f \in \mathcal{L})\ \underline{P}(f|\mathcal{B}) \notin \mathcal{D} \Rightarrow f \notin \mathcal{D}$.

Co6. $\mathcal{D}$ satisface la $\mathcal{B}$-conglomerabilidad negativa.

Co7. $\underline{P}(f - \underline{P}(f|\mathcal{B})) \leq 0$.

Co8. $\underline{P} \leq \underline{P}(\underline{P}(\cdot|\mathcal{B}))$,

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Co5} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{Co8} \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{Co6} \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & \text{Co7} &
\end{tikzcd}$$

El caso preciso

Cuando $\mathcal{D}$ induce modelos precisos P, $P(\cdot|\mathcal{B})$, se tienen las siguientes implicaciones:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & & \text{Co5} \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & \textcolor{red}{\text{Co2}} \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{Co1} \arrow[d, Rightarrow] & & \textcolor{red}{\text{Co6}} \arrow[dl, Rightarrow] & \\
\text{Co3} & \Leftrightarrow & \text{Co4} & \Leftrightarrow & \text{Co7} & \Leftrightarrow & \text{Co8}
\end{tikzcd}
$$

Maximalidad

Un caso particular del anterior se obtiene cuando $\mathcal{D}$ es maximal:

$$(\forall f \neq 0)\ f \notin \mathcal{D} \Rightarrow -f \in \mathcal{D}.$$

En ese caso, se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{Co5} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{Co2} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{Co6} \arrow[d, Rightarrow] & & \text{Co1} \arrow[dl, Rightarrow] \\
\text{Co3} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{Co4} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{Co7} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{Co8}
\end{tikzcd}$$

Relación con la extensión marginal

Cuando tenemos información (imprecisa) jerárquica, el modelo resultante cumple $\underline{P} = \underline{P}(\underline{P}(\cdot|\mathcal{B}))$, y se dice que es una extensión marginal.

Proposición

Sea $\mathcal{D}$ un conjunto coherente de apuestas deseables tal que

$$(\forall f \in \mathcal{D}, f \ngeq 0)(\exists \epsilon > 0)\ f - \epsilon \in \mathcal{D}.$$

Si la previsión que induce es una extensión marginal, entonces $\mathcal{D}$ es conglomerable y negativamente conglomerable.

Relación con la dilatación

Con modelos imprecisos, Seidenfeld observó el fenómeno de dilatación, que ocurre cuando el modelo condicionado es siempre más impreciso que el original, sea cual sea el suceso observado.

- Si se cumple
$$\sup_B \underline{P}(f|B) < \underline{P}(f) \leq \overline{P}(f) < \inf_B \overline{P}(f|B),$$
entonces existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{D}$ viola la conglomerabilidad negativa en $f - \mu$.
- Por otro lado, puede que no se cumpla la conglomerabilidad negativa en f pero que no se produzca la dilatación en ningún $f + \mu$.

Conglomerabilidad negativa como una condición estructural

Si $\mathcal{D}$ no es $\mathcal{B}$-conglomerable negativo, podemos buscar una transformación mínima que lo cumpla. Sin embargo:

- No siempre existe un conjunto $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$ que sea $\mathcal{B}$-conglomerable.
- Incluso aunque exista, no siempre existe un superconjunto mínimo.
- Por otro lado, siempre existe un subconjunto $\mathcal{D}'' \subset \mathcal{D}$ que sea $\mathcal{B}$-conglomerable.
- Bajo ciertas condiciones, el subconjunto máximo $\mathcal{B}$-conglomerable es

$$\text{posi}(\{f \in \mathcal{D} : \exists B \in \mathcal{B} \text{ tal que } Bf \in \mathcal{D}\}).$$

Racionalidad de la conglomerabilidad negativa

La condición de conglomerabilidad se puede justificar como un axioma de racionalidad si se sumple (Zaffalon y Miranda, 2021):

(i) Información perfecta: toda la información es conocida en el momento actual.

(ii) Fiabilidad: si una apuesta es deseable ahora, lo será también en el futuro.

(iii) Refinamiento: las creencias futuras pueden ser más precisas que las actuales.

Sin embargo, estos argumentos no permiten justificar la conglomerabilidad negativa.

Por otro lado, la justificación de la conglomerabilidad desde el punto de vista de análisis de sensbilidad de Walley tampoco se extiende a la conglomerabilidad negativa.

Conclusiones y problemas abiertos

- La conglomerabilidad negativa no tiene el mismo status de racionalidad que la conglomerabilidad.
- Se cumple si el modelo tiene una estructura jerárquica (=extensión marginal).
- Sin embargo, no es compatible con el fenómeno de dilatación.

Líneas futuras:

- Estudio con modelos de aceptación-rechazo (Quaeghebeur et al., 2015.)
- Análisis con utilidades no lineales (Miranda y Zaffalon, 2023).
- Conexión con independencia (Seidenfeld y Wasserman,1993).

Algunas referencias

E. Miranda, M. Zaffalon.
Nonlinear desirability theory.
International Journal of Approximate Reasoning, 154(C):176–199, 2023.

E. Quaeghebeur, G. de Cooman, F. Hermans.
Accept & reject statement-based uncertainty models.
International Journal of Approximate Reasoning, 57:69–102, 2015.

T. Seidenfeld, L. Wasserman.
Dilation for sets of probabilities.
The Annals of Statistics, 21(3):1139–1154, 1993.

M. Zaffalon, E. Miranda.
Desirability foundations of robust rational decision making.
Synthese, 198(Suppl. 27):6529–6570, 2021.

P. Walley.
Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities.
Chapman and Hall, London, 1991.

MINISTERIO DE CIENCIA, INNOVACIÓN Y UNIVERSIDADES

Cofinanciado por la Unión Europea

AGENCIA ESTATAL DE INVESTIGACIÓN

Proyecto PID2022-140585NB-I00 financiado por MCIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER,UE.

Gracias por la atención...

...y por las preguntas!