

Comparación de criterios de optimalidad para probabilidades imprecisas

Nicolás Carrizosa, Ignacio Montes y Enrique Miranda

SEIO'26 - 2 de Septiembre de 2026



1. Introducción
2. Modelización de la imprecisión
 - Previsiones inferiores
 - Ejemplos de modelos de distorsión
 - Modelos LVar
3. Decisión con modelos LVar
 - Contexto
 - Elección de un modelo de distorsión
4. Ejemplo
5. Conclusiones

1. Introducción

2. Modelización de la imprecisión

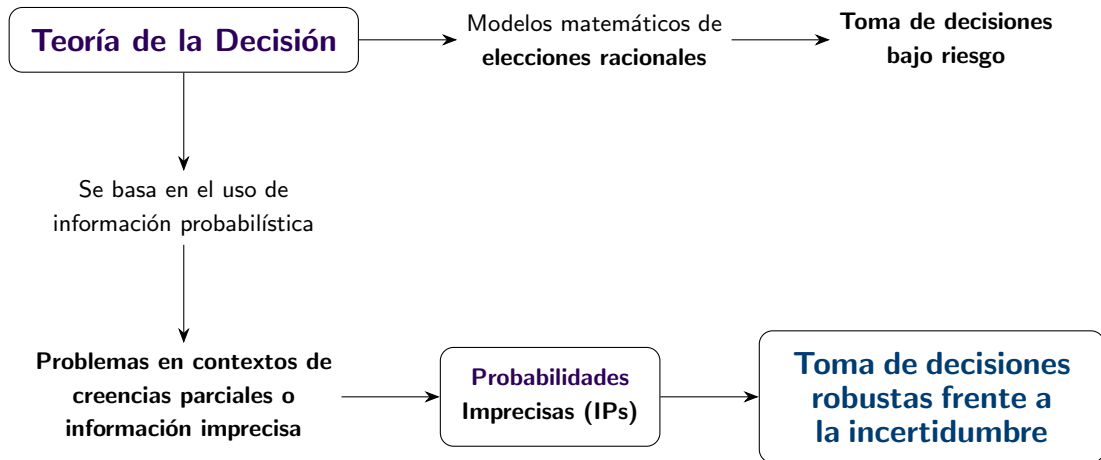
- Previsiones inferiores
- Ejemplos de modelos de distorsión
- Modelos LVar

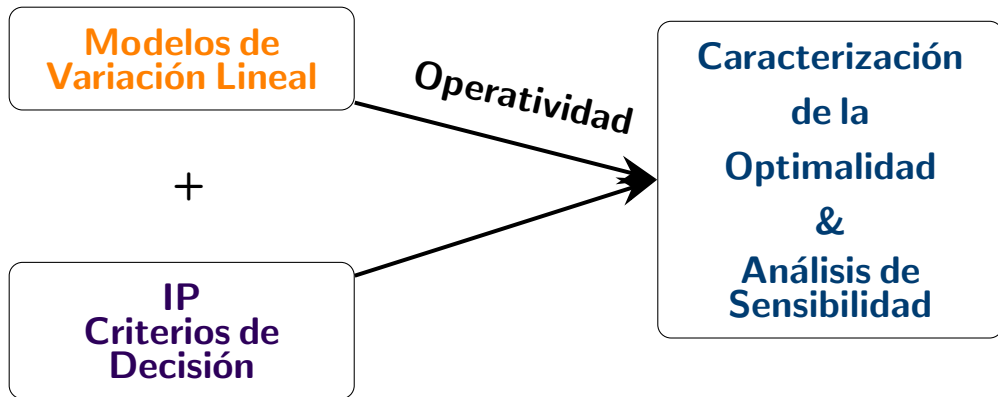
3. Decisión con modelos LVar

- Contexto
- Elección de un modelo de distorsión

4. Ejemplo

5. Conclusiones





Troffaes, 2007

1. Introducción

2. Modelización de la imprecisión

- Previsiones inferiores
- Ejemplos de modelos de distorsión
- Modelos LVar

3. Decisión con modelos LVar

- Contexto
- Elección de un modelo de distorsión

4. Ejemplo

5. Conclusiones

Probabilidades imprecisas: modelos que permiten tomar decisiones robustas, basados en el uso de conjuntos de medidas de probabilidad, o **conjuntos credales** (Walley, 1991).

Consideramos Ω finito, denotamos por $\mathbb{P}(\Omega)$ el conjunto de medidas de probabilidad y por

$$\mathcal{L}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\} \quad \text{el **conjunto de apuestas**}$$

Previsión inferior

Una *previsión inferior* asigna una **cota inferior de las esperanzas** compatible con la información disponible

$$\underline{P} : \mathcal{L}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

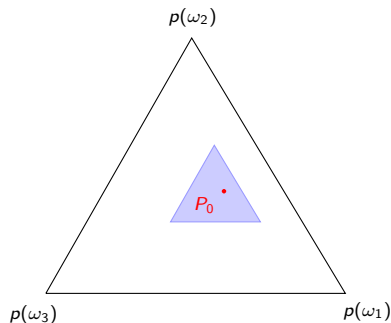
El conjunto de **medidas de probabilidad compatibles**, $\mathcal{M}(\underline{P})$, verifica

$$P \in \mathcal{M}(\underline{P}) \Leftrightarrow \underline{P}(f) \leq P(f) \quad \forall f \in \mathcal{L}(\Omega)$$

Previsiones inferiores coherentes

Decimos que $\underline{P}$ es **coherente** si las cotas inferiores $\underline{P}(f)$ se alcanzan:

$$\underline{P}(f) = \min_{P \in \mathcal{M}(\underline{P})} P(f) \quad \forall f \in \mathcal{L}(\Omega)$$



Modelos de distorsión

Dados $P_0 \in \mathbb{P}(\Omega)$, $\delta \geq 0$ y una función de distorsión $d : \mathbb{P}(\Omega) \times \mathbb{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+$, el *modelo de distorsión* asociado con (P_0, d, δ) es

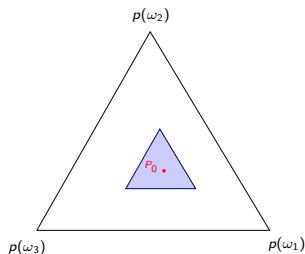
$$B_d^\delta(P_0) = \{P \in \mathbb{P}(\Omega) \mid d(P, P_0) \leq \delta\}.$$

Dados $P_0 \in \mathbb{P}(\Omega)$ y $\delta \geq 0$, se define, para $A \neq \Omega, \emptyset$:

Modelo de contaminación

$$\underline{P}_{LV}(A) = (1 - \delta) P_0(A).$$

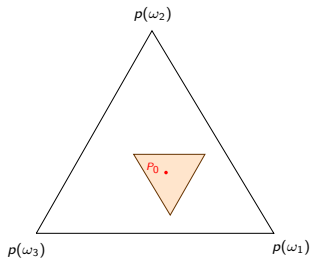
‘Existe una proporción δ de datos contaminados’



Modelo pari mutuel

$$\underline{P}_{PM}(A) = \max\{(1 + \delta) P_0(A) - \delta, 1\}.$$

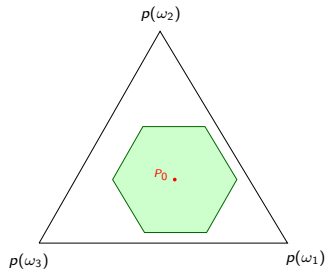
‘Se establece una tasa porcentual δ sobre las apuestas a la ocurrencia de un suceso’



Modelo de variación total

$$\underline{P}_{TV}(A) = \max\{P_0(A) - \delta, 0\}.$$

‘El rango de probabilidades de un suceso está acotado por δ ’



Los modelos anteriores pueden representarse mediante previsiones inferiores.

Cuando $P_0 \in \mathbb{P}^*(\Omega)$ (el interior del simplex), sus previsiones inferiores son:

$$\underline{P}_{LV}(f) = P_0(f) - \delta (P_0(f) - \min f) \quad \text{si } \delta < 1.$$

$$\underline{P}_{PM}(f) = P_0(f) - \delta (\max f - P_0(f)) \quad \text{si } \delta < \min_{\omega \in \Omega} \frac{P_0(\{\omega\})}{1 - P_0(\{\omega\})}.$$

$$\underline{P}_{TV}(f) = P_0(f) - \delta (\max f - \min f) \quad \text{si } \delta < \min_{\omega \in \Omega} P_0(\{\omega\}).$$

Los modelos anteriores pueden representarse mediante previsiones inferiores.

Cuando $P_0 \in \mathbb{P}^*(\Omega)$ (el interior del simplex), sus previsiones inferiores son:

$$\underline{P}_{LV}(f) = P_0(f) - \delta (P_0(f) - \min f) \quad \text{si } \delta < 1.$$

$$\underline{P}_{PM}(f) = P_0(f) - \delta (\max f - P_0(f)) \quad \text{si } \delta < \min_{\omega \in \Omega} \frac{P_0(\{\omega\})}{1 - P_0(\{\omega\})}.$$

$$\underline{P}_{TV}(f) = P_0(f) - \delta (\max f - \min f) \quad \text{si } \delta < \min_{\omega \in \Omega} P_0(\{\omega\}).$$

**Se disminuye la
probabilidad por un
factor δ asociado
a la variabilidad!**

Sean $P_0 \in \mathbb{P}^*(\Omega)$, $\delta \geq 0$ y un **operador variacional** $\underline{\Delta} : \mathcal{L}(\Omega) \rightarrow [0, +\infty)$ cumpliendo

1. $\underline{\Delta}f = 0 \Leftrightarrow f$ es constante.
2. $\delta \underline{\Delta}f \leq P_0(f) - \min f$ para todo $f \in \mathcal{L}(\Omega)$.
3. $\underline{\Delta}(\alpha f) = \alpha \underline{\Delta}f$ para todo $\alpha \geq 0$.
4. $\underline{\Delta}(f + g) \leq \underline{\Delta}f + \underline{\Delta}g$ para todo $f, g \in \mathcal{L}(\Omega)$.

Modelos de Variación Lineal

Llamamos modelo de **Variación Lineal** (LVar) asociado a $(P_0, \underline{\Delta}, \delta)$ a la previsión inferior definida por:

$$P_{\underline{\Delta}}(f) = P_0(f) - \delta \underline{\Delta}f, \quad \forall f \in \mathcal{L}(\Omega).$$

Un modelo LVar $\underline{P}_{\underline{\Delta}}$ es **coherente** y cumple $P_0 \in \mathcal{M}(\underline{P}_{\underline{\Delta}})$.

La **condición 2** establece una **cota sobre δ** para que un modelo LVar sea coherente:

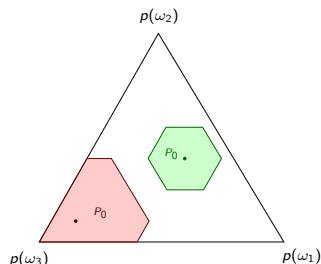
$$\delta \leq \inf_{f \text{ no constante}} \frac{P_0(f) - \min f}{\underline{\Delta} f}.$$

Los modelos LV, PM y TV son LVar:

$$\underline{\Delta}_{LV}(f) = P_0(f) - \min f$$

$$\underline{\Delta}_{PM}(f) = \max f - P_0(f)$$

$$\underline{\Delta}_{TV}(f) = \max f - \min f$$



1. Introducción

2. Modelización de la imprecisión

- Previsiones inferiores
- Ejemplos de modelos de distorsión
- Modelos LVar

3. Decisión con modelos LVar

- Contexto
- Elección de un modelo de distorsión

4. Ejemplo

5. Conclusiones

Estados

$\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^n$	Escenarios
$D = \{d_j\}_{j=1}^m$	Alternativas
$\{J_{d_j}\}_{j=1}^m \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$	Apuestas representando la utilidad de las alternativas

Decisión	ω_1 (Llueve)	ω_2 (No llueve)
d_1 (Paraguas)	0	-1
d_2 (No)	-5	0

No Info. $\longrightarrow \text{opt}_{\geq}(D) = \{d \in D \mid J_e \not\geq J_d \ \forall e \in D\} (\equiv D)$

Info. Prob. $\xrightarrow{\text{Savage, 1972}} \text{opt}_P(D) = \{d \in D \mid P(J_d) \geq P(J_e) \ \forall e \in D\}$

Estados

$$\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^n$$

Escenarios

$$D = \{d_j\}_{j=1}^m$$

Alternativas

$$\{J_{d_j}\}_{j=1}^m \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$$

Apuestas representando
la utilidad de las
alternativas

Decisión	ω_1 (Llueve)	ω_2 (No llueve)
d_1 (Paraguas)	0	-1
d_2 (No)	-5	0

No Info.

$$\longrightarrow \text{opt}_{\geq}(D) = \{d \in D \mid J_e \not\geq J_d \forall e \in D\} (\equiv D)$$

Info. Prob.

$$\xrightarrow{\text{Savage, 1972}} \text{opt}_P(D) = \{d \in D \mid P(J_d) \geq P(J_e) \forall e \in D\}$$

Se necesita un término medio!

Dada una previsión inferior coherente $\underline{P}$, la **utilidad esperada** se puede extender como en **Troffaes, 2007**:

$$\Gamma\text{-maximin} \longrightarrow \text{opt}_{\underline{P}} = \{d \in D \mid \underline{P}(J_d) \geq \underline{P}(J_e) \forall e \in D\}$$

$$\Gamma\text{-maximax} \longrightarrow \text{opt}_{\bar{P}} = \{d \in D \mid \bar{P}(J_d) \geq \bar{P}(J_e) \forall e \in D\}$$

$$\text{E-admisibilidad} \longrightarrow \text{opt}_{\mathcal{M}(\underline{P})} = \{d \in D \mid \exists P \in \mathcal{M}(\underline{P}) \text{ t.q. } d \in \text{opt}_P\}$$

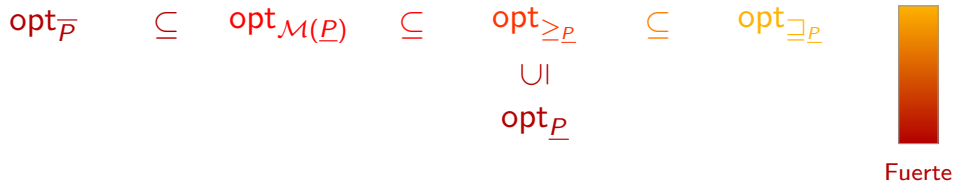
$$\text{Maximalidad} \longrightarrow \text{opt}_{\geq \underline{P}} = \{d \in D \mid \underline{P}(J_e - J_d) \leq 0 \forall e \in D\}$$

$$\text{Dominancia intervalar} \longrightarrow \text{opt}_{\sqsupseteq \underline{P}} = \{d \in D \mid \bar{P}(J_d) \geq \underline{P}(J_e) \forall e \in D\}$$

Según el criterio que usemos, las relaciones de preferencia entre las alternativas serán más o menos sencillas de determinar, o habrá más casos de incomparabilidad.

Relaciones entre los criterios

Algunos criterios son más estrictos que otros:



En el caso de modelos LVar $\underline{P}_\Delta$, podemos reformular los criterios anteriores a partir de una **distorsión de la utilidad esperada**:

$$d \in \text{opt}_{\underline{P}_\Delta} \iff P_0(J_d) \geq \max_{e \in D} \left\{ P_0(J_e) - \delta(\underline{\Delta}J_e - \underline{\Delta}J_d) \right\},$$

$$d \in \text{opt}_{\overline{P}_\Delta} \iff P_0(J_d) \geq \max_{e \in D} \left\{ P_0(J_e) - \delta(\overline{\Delta}J_d - \overline{\Delta}J_e) \right\},$$

$$d \in \text{opt}_{\mathcal{M}(\underline{P}_\Delta)} \iff P_0(J_d) \geq \max_{\lambda \in G(D)} \left\{ P_0(J_\lambda) - \delta \underline{\Delta}(J_\lambda - J_d) \right\},$$

$$d \in \text{opt}_{\geq \underline{P}_\Delta} \iff P_0(J_d) \geq \max_{e \in D} \left\{ P_0(J_e) - \delta \underline{\Delta}(J_e - J_d) \right\},$$

$$d \in \text{opt}_{\sqsupseteq \underline{P}_\Delta} \iff P_0(J_d) \geq \max_{e \in D} \left\{ P_0(J_e) - \delta(\underline{\Delta}J_e + \overline{\Delta}J_d) \right\}.$$

Las caracterizaciones anteriores permiten determinar cuándo una alternativa es óptima o la distorsión necesaria para que lo sea, en función del criterio de optimalidad impreciso considerado.

Ejemplo: Γ -maximin

Dado $d \in D$, si existe $e \in D$ tal que

$$P_0(J_d) \leq P_0(J_e) \text{ y } \underline{\Delta} J_d \geq \underline{\Delta} J_e,$$

con alguna desigualdad estricta, entonces $d \notin \text{opt}_{\underline{P}_{\underline{\Delta}}}$ para todo $\delta > 0$.

En otro caso, $d \in \text{opt}_{\underline{P}_{\underline{\Delta}}}$ si y sólo si

$$\max_{e \in D_{\underline{P}_{\underline{\Delta}}}^{d-}} \left\{ \frac{P_0(J_e) - P_0(J_d)}{\underline{\Delta} J_e - \underline{\Delta} J_d} \right\} \leq \delta \leq \min_{e \in D_{\underline{P}_{\underline{\Delta}}}^{d+}} \left\{ \frac{P_0(J_e) - P_0(J_d)}{\underline{\Delta} J_e - \underline{\Delta} J_d} \right\},$$

siendo $D_{\underline{P}_{\underline{\Delta}}}^{d-} = \{e \in D \mid \underline{\Delta} J_d < \underline{\Delta} J_e\}$, $D_{\underline{P}_{\underline{\Delta}}}^{d+} = \{e \in D \mid \underline{\Delta} J_d > \underline{\Delta} J_e\}$.

1. Introducción

2. Modelización de la imprecisión

- Previsiones inferiores
- Ejemplos de modelos de distorsión
- Modelos LVar

3. Decisión con modelos LVar

- Contexto
- Elección de un modelo de distorsión

4. Ejemplo

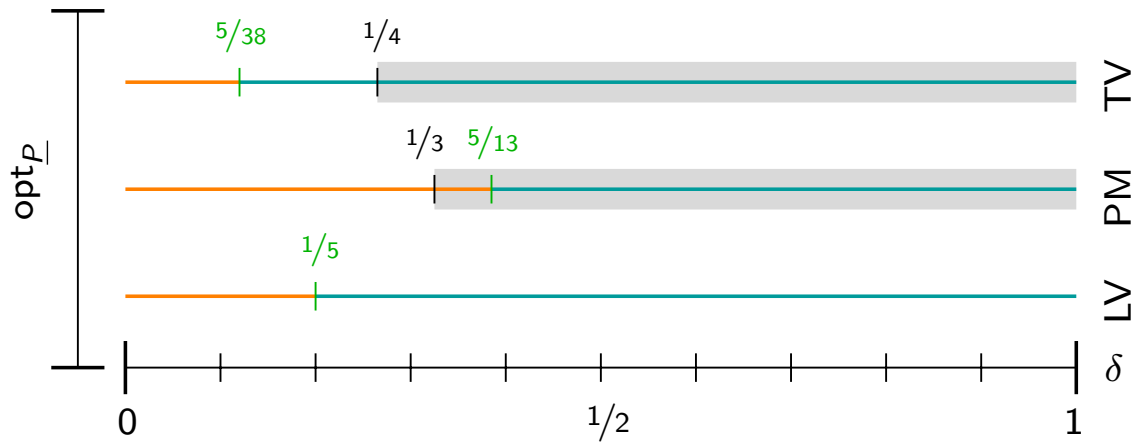
5. Conclusiones

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \quad P_0 = (1/2, 1/4, 1/4)$$

	ω_1	ω_2	ω_3	$P_0(J_{d_i})$	$\underline{\Delta}_{LV}(J_{d_i})$	$\underline{\Delta}_{PM}(J_{d_i})$	$\underline{\Delta}_{TV}(J_{d_i})$
J_{d_1}	3	-3	0	$3/4$	$15/4$	$9/4$	6
J_{d_2}	$3/4$	$-1/2$	$-1/2$	$1/8$	$5/8$	$5/8$	$5/4$

- $\text{opt}_{P_0} = \{d_1\}$
- Como $P_0(J_{d_2}) < P_0(J_{d_1})$ y $\bar{\Delta}(J_{d_2}) < \bar{\Delta}(J_{d_1})$ para todos los modelos, d_2 no será Γ -maximax $\implies \text{opt}_{\bar{P}} = \{d_1\}$ para todos los modelos y para todo δ .

Optimalidad ● d_1 ● d_2 ● d_1, d_2



1. Introducción

2. Modelización de la imprecisión

- Previsiones inferiores
- Ejemplos de modelos de distorsión
- Modelos LVar

3. Decisión con modelos LVar

- Contexto
- Elección de un modelo de distorsión

4. Ejemplo

5. Conclusiones

- Los modelos **LVar** son una **nueva familia de modelos de probabilidades imprecisas** que generaliza muchos **modelos de distorsión**.
- El análisis de decisiones con modelos LVar permite hacer un **análisis de sensibilidad** y **comparar distorsiones de la utilidad esperada**.
- **Líneas futuras:**
 - Propiedades de los modelos LVar.
 - Distorsiones con valores grandes de δ .
 - Otros criterios de optimalidad.
 - Aplicaciones.



I. Montes, E. Miranda, S. Destercke. *Unifying neighbourhood and distortion models. Parts I and II*. IJGS, 2020.



L. Savage. *The Foundations of Statistics*. Dover, 1972.



M. Troffaes. *Decision making under uncertainty using imprecise probabilities*. IJAR, 2007.



P. Walley, *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*. Chapman and Hall, 1991.



Proyecto PID2022-140585NB-I00 financiado por MCIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER,UE.

...y por las preguntas!